Marina Chanuchowa 12. Juli 2005

Zur Buchbesprechung C.L. Siegel: „Topics in Complex Analysis“

Die Theorie der elliptischen Funktionen besitzt eine lange Geschichte. Sie beginnt 1718 mit der Entdeckung außergewöhnlicher Eigenschaften des Lemniskatenbogens durch den italienischen Mathematiker Fagnano[1]. Tatsächlich hatte Fagnano bemerkenswerte Eigenschaften der Lemniskate geprüft, einschließlich der Tatsache, daß der Bogen mittels Zirkel und Lineal in n gleiche Teile geteilt werden kann, wobei $n = 2 \cdot 2^m, 3 \cdot 2^m$ oder $5 \cdot 2^m$.

Eine Lemniskate ist der Ort eines Punktes η, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten η_1, η_2 ein konstantes Produkt c^2 haben.

Sei $2a$ der Abstand zwischen den beiden festen Punkten $\eta_1 = (-a, 0)$ und $\eta_2 = (a, 0)$, weiterhin bezeichne r_1 den Abstand von η_1 zu $\eta = (x, y)$ sowie r_2 den Abstand von η_2 zu η, und r den Abstand von η zum Nullpunkt.

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

$$r_1^2 = (x + a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 + 2ax$$

$$r_2^2 = (x - a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 - 2ax$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; r_1^2 r_2^2 &= (r^2 + a^2 + 2ax)(r^2 + a^2 - 2ax) \\ &= r^4 + 2a^2 r^2 + a^4 - 4a^2 x^2 \end{aligned}$$

Da $r_1 r_2 = c^2$ gilt, ist

$$c^4 = r^4 + 2a^2 r^2 + a^4 - 4a^2 x^2. \tag{2}$$

Für unterschiedliche Werte von c erhält man verschiedene Arten von Lemniskaten.

Wir betrachten im folgenden die Lemniskaten, welche durch den Ursprung gehen und die Form einer liegenden Acht haben. Das bedeutet: $a = c$. Man setzt $a^2 = \frac{1}{2}$, also ist der Abstand zwischen η_1 und η_2 gleich $\sqrt{2}$. Die

[1] Giulio Carlo Fagnano dei Toschi, 6.12.1682-26.9.1766, Italy

Kurve ist symmetrisch bezüglich beider Achsen, deswegen kann man sich bei der Untersuchung der Kurve nur auf den ersten Quadranten beschränken.

Um die Länge des Bogens s zu bestimmen, benutzt man r als unabhängige Variable, welche das Intervall $[0,1]$ durchläuft.

Man verwendet die Formel zur Bestimmung der Bogenlänge eines Kreises.

Sei $0 \leq r \leq 1$. Aus (2) erhalten wir $2x^2 = r^2 + r^4$, und es folgt

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2x\frac{dx}{dr} &= 2r + 4r^3 \\ \Leftrightarrow 2x\dot{x} &= r + 2r^3 \end{aligned} \tag{3}$$

Analog erhalten wir aus (2) mit (1) $2y^2 = r^2 - r^4$, und schließen

$$2y\dot{y} = r - 2r^3. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \dot{s}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ \Leftrightarrow (2xy)^2\dot{s}^2 &= (2xy)^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &\overset{(3),(4)}{=} y^2(r+2r^3)^2 + x^2(r-2r^3)^2 = r^4. \end{aligned}$$

Insgesamt hat man

$$\begin{aligned} (2xy)^2 = (r^2+r^4)(r^2-r^4) &= r^4(1-r^4) \\ (1-r^4)\dot{s}^2 &= 1 \\ \frac{ds}{dr} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} \end{aligned}$$

Bekannt ist:

$$\arcsin r = \int_0^r \frac{dr}{1-r^2} \quad (0 \leq r \leq 1)$$

Substituiere

$$r := \frac{2t}{1+t^2} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Dann gilt

$$\sqrt{1-r^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = \frac{(1+t)^2 - 4t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2(1+t^2) - 2t2t}{(1+t^2)^4} = \frac{2t - 2t^2}{1+t^4} = 2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$
$$= \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{1-r^2}}{(1+t^2)^2}$$

Dann gilt

$$\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Beim lemniskatischen Integral hat man $\sqrt{1-r^4}$ statt $\sqrt{1-t^2}$.

Analog setzt man

$$r^2 := \frac{2t^2}{1+t^4}, \tag{5}$$

d.h. $r = \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

$$\sqrt{1-r^4} = \frac{1-t^4}{1+t^4}$$
$$r\sqrt{1-r^4} = \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+t^4}} \frac{1-t^4}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}t(1-t^4)}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{1+t^4}t\frac{1-t^4}{(1+t^4)^2}$$
$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{1+t^4} - t\frac{4t^3}{2\sqrt{1+t^4}}}{1+t^4} =$$
$$= \sqrt{2}\frac{2(1+t^4) - 4t^4}{2\sqrt{1+t^4}(1+t^4)}$$
$$= \sqrt{2}\frac{1-t^4}{\sqrt{1+t^4}(1+t^4)}$$
$$r\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+t^4}} \frac{\sqrt{2}(1-t^4)}{\sqrt{1+t^4}(1+t^4)} = \frac{2t(1-t^4)}{(1+t^4)^2}$$
$$= 2\frac{r\sqrt{1-r^4}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \sqrt{2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Es folgt

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \sqrt{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}, \quad 0 \le r \le 1, \tag{6}$$

wobei t die Lösung von

$$\frac{2t^2}{1+t^4} = r^2, \quad 0 \le t \le 1$$

ist. Wenn man

$$t^2 := \frac{2u^2}{1-u^4} \tag{7}$$

setzt, erhält man analog

$$\sqrt{1+t^4} = \sqrt{1+\frac{4u^4}{(1-u^4)^2}} = \sqrt{\frac{(1-u^4)^2+4u^4}{(1-u^4)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+u^4)^2}{(1-u^4)^2}} = \frac{1+u^4}{1-u^4}.$$

Dann:

$$\sqrt{1+t^4} = \frac{1+u^4}{1-u^4}, \qquad t\sqrt{1+t^4} = \sqrt{2}\frac{u(1+u^4)}{(1-u^4)^{\frac{3}{2}}},$$

$$t\frac{dt}{du} = \frac{2u(1+u^4)}{(1-u^4)^2}, \qquad \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \sqrt{2}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

u nimmt die Werte zwischen 0 und 1, t zwischen 0 und ∞ an, wobei $t = 0$ für $u = 0$ gilt. Damit

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \sqrt{2}\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-u^4}}, \tag{8}$$

d.h. mit (6)

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = 2\int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Wenn man u als Radius betrachtet, gilt:

$$\sigma = s(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Dabei ist die σ die Bogenlänge der Lemniskate vom Ursprung bis zum Punkt (ξ, η) im ersten Quadranten, dessen Koordinaten durch die Gleichungen

$$2\xi^2 = u^2 + u^4 \tag{9}$$

$$2\eta^2 = u^2 - u^4 \tag{10}$$
$$\Rightarrow 2\xi^2 + 2\eta^2 = 2u^2 \;\Leftrightarrow\; \eta^2 = u^2 - \xi^2$$

bestimmt werden.

Zusammenfassend:

$$s = s(r) = 2s(u) = 2\sigma. \tag{11}$$

Das zeigt, daß man eine einfache algebraische Beziehung hat zwischen den Werten der oberen Grenzen r und u der lemniskatischen Integrale hat.

Mit (5) und (7) hat man

$$r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4} = 2\frac{\frac{2u^2}{1-u^4}}{1+\frac{4u^4}{(1-u^2)^4}} = \frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}.$$

Im Hinblick auf (11) ist die Länge des Bogens s der Lemniskate mit dem Endpunkt (x, y) das Doppelte der Länge des Bogens σ mit dem Endpunkt (ξ, η).
Wegen $r^2 = x^2 + y^2$ ist r^2 eine rationale Funktion von x und y. Aus (5) erhält man t^2 mittels einer quadratischen Gleichung:

$$r^2(1+t^4) - 2t^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; r^2 + r^2t^4 - 2t^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; t^4 - \frac{2}{r^2}t^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; t^2 = \frac{1}{r^2} - \sqrt{\frac{1}{r^4} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \sqrt{\frac{1}{r^4} - 1}} \;\leq 1, \tag{12}$$

und u^2 berechnet man aus (7) auch wieder durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$u^4 + \frac{2}{t^2}u^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; u^2 = \frac{1}{t^2 + \sqrt{\frac{1}{t^4} + 1}} < 1. \tag{13}$$

ξ und η erhält man aus (9) und (10).

Gezeigt wurde hiermit, wie man einen durch seinen Endpunkt gegebenen Lemniskatenbogen verdoppeln und halbieren kann, nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal. Diese Entdeckung stammt von Fagnano.

Bis jetzt betrachteten wir nur Lemniskatenbögen im ersten Quadranten. D.h, daß der Bogen, den man verdoppeln will, so klein gewählt werden muß, daß der Endpunkt des verdoppelten Bogens immer noch im ersten Quadranten liegt. Da die Werte von u, r, t monoton zusammenhängen, erhält man den größtmöglichen Wert für u mit $r = 1$ als maximalen Wert (aus (12), (13)), d.h. $t^2 = 1$, $u^2 = \sqrt{2} - 1$.

Für ξ, η erhält man aus (9) und (10)

$$2\xi^2 = u^2 + u^4 = u^2(1 + u^2) = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2},$$

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

sowie

$$2\eta^2 = u^2 - \xi^2 = \sqrt{2} - 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{\sqrt{2}},$$

$$\eta = \sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Abschließend noch eine Bemerkung, die nicht bei Fagnano auftaucht, sondern erst später in der Entwicklung der Theorie elliptischer Funktionen auftauchte. Die Integrale für t in (6) und (8) sind nicht mehr lemniskatisch. Dieses Manko kann man durch Division von t durch eine achte Einheitswurzel beheben:

Sei also $\varepsilon := e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $t := \varepsilon v$, dann ist

$$t^2 = \varepsilon^2 v^2 = e^{\frac{\pi i}{2}} v^2 = i v^2,$$

$$t^4 = (i v^2)^2 = -v^4,$$

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon \ \Leftrightarrow dt = \varepsilon dv,$$

$$\sqrt{2} dt = \sqrt{2} \varepsilon dv = (1 + i) dv$$

$$\Rightarrow \ \frac{1 + i}{\sqrt{2}} dv = dt,$$

(5) und (6) erhalten damit die Gestalt

$$r^2 = \frac{2iv^2}{1 - v^4}, \quad \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} = (1 + i) \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - v^4}}. \tag{14}$$

Wenn wir in (8) durch ε teilen, und mit $\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} = 1 - i$, erhalten wir mit (7)

$$iv^2 = \frac{2u^2}{1-u^4}$$

$$\Rightarrow \; v^2 = \frac{-2iu^2}{1-u^4}, \quad \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = (1-i)\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}. \tag{15}$$

Die Integrale in (14) und (15) sind alle lemniskatisch. Diese Gleichungen enthalten Multiplikationsformeln des Lemniskatischen Integrals mit Faktoren $1+i, 1-i$. Beachtet man $(1+i)(1-i) = 2$, so erhält man aus den Beziehungen (14) und (15) die vorigen Resultate zum Verdoppeln der Länge des Lemniskatenbogens.

Fagnano hat viele von seinen herausgegebenden Arbeiten gesammelt, sowie auch nicht veröffentliche. 1750 schrieb er die zweiteilige Abhandlung *Produzioni matematiche*. 1751 wurde Leonhard Euler gebeten, das Buch zu überprüfen. Er fand dort unerwartete Zusammenhänge zwischen speziellen Arten der elliptischen Integrale, die die Länge des Lemniskatebogens ausdrücken. Dies war sehr überraschend für Euler. Er fuhr fort, die Ergebnisse von Fagnano zu verallgemeinern, insbesondere verdankt man Euler das bekannte Additionstheorem für elliptische Funktionen.

Literatur:

Siegel, *Topics in Complex Function Theory*, Vol. 1, Wiley-Interscience, 1969

R Ayoub, *The lemniscate and Fagnano's contributions to elliptic integrals*, Arch. Hist. Exact Sci. 29 (2), 1984, 131-149

Internet:

Dieses Dokument:
algebra2.de/siegel.pdf (Marina Chanuchowa)

Biographie Fagnano:
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fagnano_Giulio.html
(J.J. O'Connor and E.F. Robertson)