Aufgabe 1

Gegeben: A sei Integritätsbereich, M ein A-Modul,

$$M_{tor} = \{m \in M : am = 0 \text{ für ein } 0 \neq a \in A\} \tag{1}$$

1) zu zeigen: M_{tor} ist ein Untermodul von M.

$M_{tor} \neq \emptyset$ trivial, wegen $0 \in M_{tor}$ nach (1). Seien $m, n \in M_{tor}$ und $r \in A$. Wegen (1) existieren Elemente $0 \neq a, b \in A$ mit

$$am = 0 \text{ und } bn = 0. \tag{2}$$

A ist ein Integritätsbereich, daher ist auch $ab \neq 0$. Aus (2) folgen $ab(m-n) = 0$ und $a(rm) = 0$, und damit $m - n \in M_{tor}$, sowie $rm \in M_{tor}$, also ist M_{tor} ein Untermodul von M.

2) zu zeigen: Für jede exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \tag{3}$$

ist auch

$$0 \longrightarrow M'_{tor} \xrightarrow{\phi'} M_{tor} \xrightarrow{\psi'} M''_{tor} \tag{4}$$

exakt.

Als Hilfsmittel beweise ich die folgende Aussage: Ist $\phi : M \longrightarrow N$ ein Modulhomomorphismus, dann ist $\phi(M_{tor}) \subseteq N_{tor}$.

$$\begin{aligned} n \in \phi(M_{tor}) &\Rightarrow \exists\, m \in M_{tor} : n = \phi(m) \\ &\Rightarrow \exists\, 0 \neq a \in A : am = 0 \quad \big(\text{wegen (1)}\big) \\ &\Rightarrow an = a\phi(m) = \phi(am) = \phi(0) = 0 \in N \\ &\Rightarrow n \in N_{tor} \\ &\Rightarrow \phi(M_{tor}) \subseteq N_{tor}. \end{aligned} \tag{5}$$

Nun betrachte ich die exakte Folge (1). Wegen (5) gibt es eine Folge (1). Dabei sind ϕ' bzw. ψ' jeweils die Einschränkungen von ϕ bzw. ψ. Da ϕ injektiv ist, ist auch ϕ' offensichtlich injektiv. Es muß noch gezeigt werden, daß $\mathrm{im}\phi' = \ker\psi'$. Sei $m \in \mathrm{im}\phi' = \ker\psi$, und zusammen mit $m \in M_{tor}$ (wegen (5)), $m \in \ker\psi' \Rightarrow \mathrm{im}\phi' \subseteq \ker\psi'$.

Sei umgekehrt $n \in \ker\psi' \subseteq \ker\psi = \mathrm{im}\phi$. ϕ ist injektiv, weil nach Voraussetzung (5) exakt ist, das bedeutet:

$$\phi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ \ \forall\, z \in M'$$

$$\phi(am) = 0 \Leftrightarrow am = 0,$$

$$\phi(am) = a\phi(m) = an = 0 \Rightarrow m \in \mathrm{im}\phi'$$

$$\Rightarrow \mathrm{im}\phi' \supseteq \ker\psi'$$

und damit $\mathrm{im}\phi' = \ker\psi'$.

Daher ist auch (2) exakt, $M \mapsto M_{tor}$ ist ein exakter Funktor von den A-Moduln in die A-Moduln.

/2P

Aufgabe 2

A sei ein Ring, M ein A-Modul.

$$\operatorname{Supp}(M) = \text{Menge aller Primideale } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \text{ mit } M_{\mathfrak{p}} \neq 0.$$

1) zu zeigen: $M \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Supp}(M) \neq \emptyset$.

In der Vorlesung (bei den lokalen Eigenschaften) wurde gezeigt, daß $M = 0$ eine lokale Eigenschaft ist. Also

$$M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathfrak{p}} = 0 \; \forall \, \mathfrak{p} \subseteq A, \mathfrak{p} \text{ Primideal},$$

und dies ist äquivalent zu

$$M \neq 0 \Leftrightarrow \exists \, \text{Primideal } \mathfrak{p} \subseteq A : M_{\mathfrak{p}} \neq 0$$

und es folgt

$$M \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Supp}(M) \neq \emptyset.$$

2) zu zeigen: $V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Supp}(A/\mathfrak{a})$

$$V(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(A/\mathfrak{a}) &\Leftrightarrow (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} \neq 0 \quad \big(\text{nach Definition, für } M := A/\mathfrak{a}\big) \\
&\Leftrightarrow \exists \, \overline{a} \in A/\mathfrak{a} : \; \overline{a}b \neq \overline{0} \; \forall \, b \in A \backslash \mathfrak{p} \\
&\Leftrightarrow \exists \, a \in A : \; ab \notin \mathfrak{a} \; \forall \, b \in A \backslash \mathfrak{p} \\
&\Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}
\end{aligned}$$

Umgekehrt: wenn $\mathfrak{a} \cap A \backslash \mathfrak{p} = \emptyset \Rightarrow ba \notin \mathfrak{a} \;\; \forall \, a \in A \backslash \mathfrak{a}$

$$\Rightarrow \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$$

3) zu zeigen: Ist
$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \tag{6}$$
eine kurze exakte Folge, dann gilt
$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M''). \tag{7}$$
Wenn (6) exakt ist, dann ist auch für das Primideal $\mathfrak{p}$
$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\phi} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\psi} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0 \tag{8}$$
eine exakte Folge. Aus der Exaktheit in (8) folgt
$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \wedge M'_{\mathfrak{p}} = 0 \Rightarrow \mathrm{im}\phi = 0 \Rightarrow \ker\psi = 0 \Rightarrow M''_{\mathfrak{p}} \neq 0$$
$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \wedge M''_{\mathfrak{p}} = 0 \Rightarrow \ker\psi = M_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \mathrm{im}\phi = M_{\mathfrak{p}} \Rightarrow M'_{\mathfrak{p}} \neq 0$$
$$M'_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Rightarrow M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \quad (\text{da } \phi \text{ injektiv ist})$$
$$M''_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Rightarrow M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \quad (\text{da } \psi \text{ surjektiv ist})$$
$$M_{\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow M'_{\mathfrak{p}} = 0 \wedge M''_{\mathfrak{p}} = 0$$
$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Leftrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \neq 0 \vee M''_{\mathfrak{p}} \neq 0$$

Es folgt
$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M') \vee \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M'')$$
und damit ist gezeigt:
$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'').$$

4) zu zeigen:

$$M = \sum_{i \in I} M_i \Rightarrow \operatorname{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Supp}(M_i)$$

Sei nun also

$$M_{\mathfrak{p}} = \sum_{i \in I} M_i.$$

Genau wie im Abschnitt 4.5.5. (Lokalisierung von Moduln) der Vorlesung im Beweis der Folgerung bzgl. Summenbildung schließe ich hier zunächst

$$M_{\mathfrak{p}} = \left(\sum_{i \in I} M_i \right)_{\mathfrak{p}} = \sum_{i \in I} (M_i)_{\mathfrak{p}}, \tag{9}$$

denn in (9) kann man ein Element auf der rechten Seite auf den Hauptnenner bringen und die Gleichheit wird ersichtlich.

Daraus folgt

$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, i \in I : (M_i)_{\mathfrak{p}} \neq 0$$

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \Leftrightarrow \exists\, i \in I : \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M_i)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Supp}(M_i).$$

/4P

Aufgabe 3

Definition: Eine multiplikativ abgeschlossene Menge S in einem Ring A heißt *saturiert*, wenn aus $xy \in S$ bereits $x \in S$ und $y \in S$ folgt.

1) zu zeigen: S ist saturiert $\Leftrightarrow A \backslash S$ ist Vereinigung von Primidealen

Angenommen, S ist saturiert. Ich zeige dann gilt

$$A \backslash S = \bigcup_{\mathfrak{p} \in A} \mathfrak{p} \quad \text{für gewisse Primideale } \mathfrak{p},$$

und da $A \backslash S$ dargestellt wird, kann ich umschreiben auf

$$A \backslash S = \bigcup_{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} \mathfrak{p}. \tag{10}$$

Die Gleichheit beweise ich durch Zeigen der Inklusion in beiden Richtungen:

$$\mathfrak{p} \in A \wedge \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{p} \in A \backslash S,$$

$$A \backslash S \supseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} \mathfrak{p},$$

diese Richtung ist ja offensichlich. Andere Richtung: Sei $a \in A \backslash S$, und bezeichne $\mathfrak{a} = (a)$.
Ich betrachte $\{s + \mathfrak{a} : s \in S\}$, bezeichne es mit $S/\mathfrak{a}$. Da S saturiert ist und $a \notin S$, gilt $S \cap \mathfrak{a} = \emptyset$, daraus folgt $S/\mathfrak{a} \not\ni 0 + \mathfrak{a} = \overline{0}$.

Weil S multiplikativ abgeschlossen ist in A, ist $S/\mathfrak{a}$ in $A/\mathfrak{a}$ multiplikativ abgeschlossen.

In der Aufgabenstellung wurde der Hinweis gegeben, sich auf den Teil 2) der Aufgabe zu beziehen. Ich tue das lieber nicht, um eine gegenseitige Abhängigkeit der Beweise zu vermeiden, denn im Teil 2) würde ich Bezug auf die Darstellung in Teil 1) nehmen.

Ich verwende den Schluß, daß es eine maximale multiplikativ abgeschlossene Teilmenge gibt, mit Darstellung

$$S_{max} = A \backslash \overline{\mathfrak{p}}, \tag{11}$$

wobei $\overline{\mathfrak{p}}$ ein minimales Primideal ist, so daß $S \subseteq S_{max}$ erfüllt ist.

In Atiyah, Commutative Algebra, steht diese Aussage, als separate Übungsaufgabe. Es mag über die hier gestellte Aufgabe hinausgehen, doch ich begründe dies kurz:
Sei Σ die Menge der multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen von A, welche die 0 nicht enthalten. Die Existenz einer maximalen multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge in Σ folgt aus dem Zornschen Lemma, in einer aufsteigenden Kette, geordnet durch Inklusion, betrachte ich die Vereinigung aller Element-Mengen dieser Kette. Weiterhin, wenn $S \in \Sigma$ maximal ist, dann ist $A\backslash S$ eine minimale prime Teilmenge von A. Verbleibt zu zeigen, daß dann $A\backslash S$ ein Ideal ist, also abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation.

$$S \text{ ist maximal} \quad \Rightarrow \quad a \in S \Leftrightarrow \exists\, s \in S, n \in \mathbb{N} : sa^n = 0,$$

denn $\left\{a^n s : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, s \in S\right\}$ ist multiplikativ abgeschlossen und enthält a und S.
Seien $a, b \in A\backslash S$, also $a, b \notin S$ und $a^{n_1}s_1 = b^{n_2}s_2 = 0 \Rightarrow (ab)^{n_1}s_1 = 0$ und $(a+b)^{n_1+n_2}s_1 s_2 = 0 \Rightarrow ab, a+b \notin S \Rightarrow ab, a+b \in A\backslash S \Rightarrow A\backslash S$ ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.
Umgekehrt sei $\overline{\mathfrak{p}}$ ein minimales Primideal in A. Dann liegt $A\backslash\overline{\mathfrak{p}}$ in Σ. Jedes $S' \in \Sigma$ mit $S' \supseteq S$ liefert ein Primideal $\mathfrak{p} = A\backslash S'$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \overline{\mathfrak{p}}$, Widerspruch zur Minimalität von $\overline{\mathfrak{p}}$.

Zurück zur eigentlichen Aufgabe. Unter Benutzung dieser Aussage betrachte ich das minimale Primideal $\overline{\mathfrak{p}}$ in (11). Dann existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, so daß $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{a}$, insbesondere $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, also ist a enthalten in der Vereinigung in (10). Damit ist die andere Richtung gezeigt, und es gilt

$$A\backslash S = \bigcup_{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} \mathfrak{p}$$

und damit die Behauptung.

zu 2)

Existenz:

Wenn S multiplikativ abgeschlossen ist, dann ist die Menge

$$\overline{S} = A \backslash \bigcup_{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} \mathfrak{p}$$

saturiert, nach Aufgabenteil 1, denn $A \backslash \overline{S}$ ist Vereinigung von Primidealen.

Weiterhin ist $\overline{S}$ multiplikativ abgeschlossen:

$$a, b \in \overline{S} \Rightarrow \underset{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset}{\forall} : a, b \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \underset{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset}{\forall} : ab \notin \mathfrak{p} \Rightarrow ab \in \overline{S}$$

und $\overline{S} \supseteq S$, denn:

$$a \in S \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{p} \cap S = 0 \Rightarrow a \notin \mathfrak{p} \qquad \Rightarrow \qquad a \in \overline{S}.$$

Eindeutigkeit:

Angenommen, es gäbe eine weitere saturierte und multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $\overline{S}'$ von $\overline{S}$, $\overline{S}' \neq \overline{S}$, welche S enthält. Nach Aufgabenteil 1 ist auch $A \backslash \overline{S}'$ eine Vereinigung von Primidealen, und das Komplement von $\overline{S}'$ in A würde mindestens ein Primideal enthalten, welches S nichttrivial schneidet, wegen Konstruktion von $\overline{S}$. Dann aber würde dieses Primideal sowohl zu S als auch zu $A \backslash \overline{S} \subseteq A \backslash S$ gehören, was ein Widerspruch ist. Also ist dieses $\overline{S}$ minimal.

/2,5P

Aufgabe 4

1) $\Rightarrow$ 2):

Nach 1) ist f bijektiv, damit bildet f surjektiv auf $T^{-1}A$ ab. Daher läßt sich jedes $\frac{t}{1} \in T^{-1}A$ darstellen als $\frac{a}{s}$ mit $a \in A$ und $s \in S$.

Wenn $a \in S$ gilt, dann ist $\frac{a}{s}$ invertierbar in $S^{-1}A$, also ist $\frac{t}{1}$ invertierbar.

Wenn $a \notin S$ ist, dann ist mit $\frac{a}{s} \sim \frac{t}{1}$ auch $s'(sa - 1t) = 0$ für ein $s' \in S$ nach Definition der Relation, also $s'(sa - t) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{t}{1}$ ist invertierbar.

unklar!

Also ist für jedes $t \in T$ das Element $\frac{t}{1}$ eine Einheit in $S^{-1}A$.

2) $\Rightarrow$ 3):

Gelte 2), dann sei die Inverse von $\frac{t}{1}$ mit $\frac{x}{y}$ bezeichnet. Dann gibt es ein $s \in S$ mit $s(xt - y) = 0$, und damit $(sx)t = ys \in S$. Das bedeutet

$$\forall\, t \in T\ \exists\, x \in A : xt \in S. \tag{12}$$

Sei $t \in T$, und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. $t \notin \mathfrak{p}$, sonst gäbe es einen Widerspruch zu (12). Das ergibt nun

$$T \subseteq A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} \mathfrak{p} = \overline{S},$$

T ist in der Saturierung von S enthalten.

3) $\Rightarrow$ 4):

Gelte 3), ist also $T \subseteq \overline{S}$, und sei $\widehat{\mathfrak{p}} \cap T \neq \emptyset$ für ein Primideal $\widehat{\mathfrak{p}}$. Nach Aufgabe 3) ist also

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{p}} \cap \left(A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} \mathfrak{p} \right) &\neq \emptyset, \\ \Rightarrow \widehat{\mathfrak{p}} \notin \{\mathfrak{p} \in A, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \\ \Rightarrow \widehat{\mathfrak{p}} \cap S \neq \emptyset, \end{aligned}$$

jedes Primideal, welches T schneidet, schneidet dann also auch S.

4) $\Rightarrow$ 1):

Gelte 4), zu zeigen ist, daß dann der natürliche Homomorphismus f bijektiv ist. Injektivität und Surjektivität sind lokale Eigenschaften, wie in der Vorlesung besprochen wurde.
Es genügt also, nachzuweisen, daß der natürliche Homomorphismus

$$f_{\widehat{\mathfrak{p}}} : (S^{-1}A)_{\widehat{\mathfrak{p}}} \longrightarrow (T^{-1}A)_{\widehat{\mathfrak{p}}}$$

bijektiv ist für alle Primideale $\widehat{\mathfrak{p}}$ von $S^{-1}A$.
Jedes solches $\widehat{\mathfrak{p}}$ hat die Form $S^{-1}\mathfrak{p}$, mit einem Primideal $\mathfrak{p}$ von A und $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, nach einer Folgerung in der Vorlesung Abschnitt 4.5.12.
Da 4) vorausgesetzt wurde, gilt somit auch $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$.

Zur Injektivität:

Sei $x \in (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$. Dann hat dieses x die Form $x = \frac{a/s_1}{b/s_2}$ mit $a \in A, b \in A \backslash \mathfrak{p}, s_1, s_2 \in S$. Sei

$$f_{S^{-1}\mathfrak{p}} = 0 = \frac{a/s_1}{b/s_2},$$

dann gibt es ein $\frac{b'}{s_3} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ mit

$$\frac{b'}{s_3}\frac{a}{s_1} = \frac{b'a}{s_3 s_1} = 0,$$

daher gibt es ein $t \in T$ mit $tb'a = 0$, dann ist wegen $b' \notin \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$ dann $tb' \notin \mathfrak{p}$, und also $tb'/1 \notin S^{-1}\mathfrak{p}$. Schlußfolgerung:

$$\frac{a/s_1}{b/s_2} = \frac{tb'a/s_1}{tb'b/s_2} = 0,$$

also ist f injektiv.

Zur Surjektivität:

Sei $x \in (T^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$. Dann hat dieses x die Form $x = \frac{a/t}{b/s}$ mit $a \in A, b \in A \backslash \mathfrak{p}, s \in S, t \in T$. Wegen $t \in \mathfrak{p}$ ist $\frac{1}{t/1} \in (T^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$.

$$\Rightarrow \frac{a/t}{b/s} = f_{S^{-1}\mathfrak{p}}\Big(\frac{ta/1}{tb/s}\Big),$$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv, zusammengenommen ist also f bijektiv.