## Aufgabe 3

**Zu zeigen:** Sind $M'$ und $M''$ zwei endlich erzeugte $A$-Moduln und ist

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge, dann ist auch $M$ endlich erzeugt.

**Beweis:**

Daß diese Folge exakt ist, bedeutet, daß $\mathrm{im}\phi = \ker\psi$, und $\psi$ ist surjektiv.

$M'$ ist endlich erzeugt, es sei mit $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Erzeugendensystem für $M'$ bezeichnet. Für $i = 1, \ldots m$ benenne ich $y_i := \phi(x_i)$. Dann wird $\ker\psi = \mathrm{im}\phi$ erzeugt durch $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

Weiterhin ist auch $M''$ endlich erzeugt, dann sei mit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Erzeugendensystem für $M''$ bezeichnet. Weil $\psi$ surjektiv ist, existieren $\{v_1, \ldots, v_n\} \in M$ mit $\psi(v_i) = u_i$ für $i = 1, \ldots n$.

Sei $N$ das durch $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erzeugte $A$-Untermodul von $M$. Das Bild $\psi(N)$ enthält $u_1 = \psi(v_1), \ldots, u_n = \psi(v_n)$, diese erzeugen $M''$. Also ist $\psi(N) = M''$.

$\Rightarrow \forall\, z \in M$ gilt $\psi(z) \in M'' = \psi(N)$, also $\exists\, v \in N$ mit $\psi(v) = \psi(z)$.

$$\Rightarrow \psi(v) - \psi(z) = 0$$
$$\Rightarrow \psi(v - z) = 0$$
$$\Rightarrow v - z \in \ker\psi = \mathrm{im}\phi$$
$$\Rightarrow z = (z - v) + v \in \mathrm{im}\phi + N$$

$\Rightarrow M = \mathrm{im}\phi + N$ ist endlich erzeugt. Ein Erzeugendensystem wäre zum Beispiel $\{y_1, \ldots, y_m, v_1, \ldots, v_n\}$.

/4P

## Aufgabe 4

**Definition:** Für einen $A$-Modul $M$ bezeichne:

$$M[X] := \Big\{ \sum a_i X^i : a_i \in M \Big\}.$$

**a) zu zeigen:** $M[X]$ ist ein $A$-Modul.

$(M[X], +)$ ist eine abelsche Gruppe mit gewöhnlicher Addition:
Bezeichne

$$p_1 = \sum a_i X^i, \quad p_2 = \sum b_i X^i \quad \text{mit } a_i, b_i \in M.$$

$p_1, p_2 \in M[X] \Rightarrow p_1 + p_2 = \sum a_i X^i + \sum b_i X^i = \sum (a_i + b_i) X^i \in M[X]$, da $a_i + b_i \in M[X]$. Dabei indiziere ich über dieselbe Indexmenge, wobei als Koeffizient auch 0 auftreten darf.

Die Assoziativität überträgt sich aus $M$:

$$p_1 + (p_2 + p_3) = \sum a_i X^i + \Big( \sum b_i X^i + \sum c_i X^i \Big) = \sum a_i X^i + \sum (b_i + c_i) X^i$$

$$= \sum \big(a_i + (b_i + c_i)\big) X^i = \sum \big((a_i + b_i) + c_i\big) X^i = \sum (a_i + b_i) X^i + \sum c_i X^i$$

$$= \Big( \sum a_i X^i + \sum b_i X^i \Big) + \sum c_i X^i = (p_1 + p_2) + p_3.$$

$M[X]$ besitzt ein linksneutrales Element $0 = \sum 0_M X^i$ mit $0_M \in M$ als neutralem Element von $M$.
$p = \sum a_i X^i \in M[X]$ besitzt ein linksinverses Element $-p = \sum (-a_i) X^i$, dabei sind die $-a_i \in M$ die inversen Elemente der $a_i \in M$, denn es ist

$$p + (-p) = \sum a_i X^i + \sum (-a_i) X^i = \sum \big(a_i + (-a_i)\big) X^i = \sum 0_M X^i = 0.$$

$M[X]$ ist kommutativ, denn

$$p_1 + p_2 = \sum a_i X^i + \sum b_i X^i = \sum (a_i + b_i) X^i = \sum (b_i + a_i) X^i$$

$$= \sum b_i X^i + \sum a_i X^i = p_2 + p_1,$$

da M kommutativ ist.

Also ist $(M[X], +)$ eine abelsche Gruppe.

Für $q \in A[X],\ p \in M[X]$ definiere ich das Produkt $qp$ als das gewöhnliche Produkt von Polynomen. Dann ist $qp \in M[X]$, denn die Koeffizienten von $q$ sind aus $A$, die Koeffizienten von $p$ sind aus $M$, und $M$ ist ein $A$-Modul, daher sind die Koeffizienten von $qp$ auch aus $M$, und folglich ist $qp \in M[X]$.

Ich überprüfe die Distributivgesetze, sie folgen im Grunde direkt aus der Distributivität von $M$ als $A$-Modul, da die Koeffizienten distributiv sind:

$$A[X] \ni q_1 = \sum a_i X^i, \quad A[X] \ni q_2 = \sum b_i X^i, \quad M[X] \ni p = \sum c_i X^i$$

mit $a_i, b_i \in A,\ c_i \in M$,

$$\begin{aligned}
(q1+q2)p &= \Big(\sum a_i X^i + \sum b_i X^i\Big) \sum c_i X^i = \Big(\sum (a_i X^i + b_i X^i)\Big) \sum c_i X^i \\
&= \Big(\sum (a_i + b_i) X^i\Big) \sum c_i X^i = \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} (a_j + b_j) c_{i-j}\Big) X^i \\
&= \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j} + b_j c_{i-j}\Big) X^i = \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j} + \sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j}\Big) X^i \\
&= \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j} X^i + \sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j} X^i\Big) \\
&= \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j} X^i\Big) + \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j} X^i\Big) = q_1 p + q_2 p.
\end{aligned}$$

Das andere Distributivgesetz in $M[X]$ folgt ebenfalls aus dem entsprechenden Distributivgesetz für $M$ als $A$-Modul:

$$M[X] \ni p_1 = \sum a_i X^i, \quad M[X] \ni p_2 = \sum b_i X^i, \quad A[X] \ni q = \sum c_i X^i$$

mit $a_i, b_i \in M,\ c_i \in A$,

$$\begin{aligned}
q(p_1 + p_2) &= \sum c_i X^i \Big(\sum a_i X^i + \sum b_i X^i\Big) = \sum c_i X^i \Big(\sum (a_i + b_i) X^i\Big) \\
&= \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} c_j (a_{i-j} + b_{i-j})\Big) X^i = \sum_{i \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} c_j a_{i-j} + c_j b_{i-j}\Big) X^i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i\geq 0} \Big( \sum_{j=0}^{i} c_j a_{i-j} + \sum_{j=0}^{i} c_j b_{i-j} \Big) X^i = \sum_{i\geq 0} \Big( \sum_{j=0}^{i} c_j a_{i-j} X^i + \sum_{j=0}^{i} c_j b_{i-j} X^i \Big)$$

$$= \sum_{i\geq 0} \Big( \sum_{j=0}^{i} c_j a_{i-j} X^i \Big) + \sum_{i\geq 0} \Big( \sum_{j=0}^{i} c_j b_{i-j} X^i \Big) = qp_1 + qp_2.$$

Auch das Assoziativgesetz überträgt sich aus dem Assoziativgesetz des $A$-Moduls $M$, denn in den entstehenden Polynomprodukten sind die Koeffizienten Produkte von Elementen des $A$-Moduls $M$ mit Elementen aus $A$, damit assoziativ mit den Elementen aus $A$, so folgt die Assoziativität von $M[X]$ bezüglich $A[X]$.

Schließlich haben wir $M = AM = \{qp : q \in A,\ p \in M\}$, also stimmt $M[x]$ mit $(AM)[X]$ überein. $\blacksquare$

**b) zu zeigen:** $M[X] \simeq A[X] \otimes_A M$

Ich definiere den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : A[X] \otimes_A M &\longrightarrow (AM)[X] \\ p(x) \otimes_A m &\longmapsto p(x)m \end{aligned}$$

mit $p(x) \in A[X],\ m \in M$.

Die Homomorphieeigenschaft von $\phi$ ist offensichtlich, und $\phi$ besitzt eine offensichtliche Inverse

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : (AM)[X] &\longrightarrow A[X] \otimes_A M \\ p(x)m &\longmapsto p(x) \otimes_A m \end{aligned}$$

Daher induziert $\phi$ einen Isomorphismus von Tensorprodukten zwischen $A[X] \otimes_A M$ und $(AM)[X]$, in a) habe ich festgestellt, daß $M[x] = (AM)[X]$, also ist $M[X] \simeq A[X] \otimes_A M$. $\blacksquare$

**c) zu zeigen:** ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $A$, dann ist $\mathfrak{p}[X]$ ein Primideal in $A[X]$.

Ich betrachte den Quotientenring $A/\mathfrak{p}$, und bezeichne $A/\mathfrak{p} \ni a + \mathfrak{p} =: \overline{a}$, für $a \in A$. Wir haben einen Ringhomomorphismus

$$\phi : A[X] \longrightarrow (A/\mathfrak{p})[X]$$
$$\phi\Big(\sum a_i X^i\Big) \longmapsto \sum \overline{a_i} X^i$$

mit $a_i \in A$, $\overline{a_i} \in A/\mathfrak{p}$.

Weil $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $A$ ist, ist $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich. Ich benutze den Satz, daß $R[X]$ ein Integritätsbereich ist, wenn $R$ ein Integritätsbereich ist. (z.B. Meyberg Kapitel 4.1). Danach ist also $A/\mathfrak{p}[X]$ ein Integritätsbereich.

Danach ist $\ker\phi$ ein Primideal in $A[X]$.

Wegen $\ker\phi = \mathfrak{p}[X]$ ist also $\mathfrak{p}[X]$ ein Primideal in $A[X]$. ∎

**d) zu prüfen:** ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A$, ist dann $\mathfrak{m}[X]$ ein maximales Ideal in $A[X]$?

Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A$. $A/\mathfrak{m}$ ist ein Körper, ich bezeichne ihn mit $k := A/\mathfrak{m}$.

Die in c) betrachtete Abbildung $\phi$ ist surjektiv, das bedeutet

$$A[X]/\mathfrak{p}[X] \simeq (A/\mathfrak{p})[X].$$

Jedes maximale Ideal ist ein Primideal, daher ist für $\mathfrak{p} := \mathfrak{m}$

$$A[X]/\mathfrak{m}[X] \simeq (A/\mathfrak{m})[X],$$

$$A[X]/\mathfrak{m}[X] \simeq k[X].$$

$k[X]$ ist kein Körper (denn $x \neq 0$ kann keine Einheit in k[X] sein), daher kann $\mathfrak{m}[X]$ kein maximales Ideal in $A[X]$ sein. ∎

/4P