## Aufgabe 3

**Zu zeigen:** Der kovariante und kontravariante Hom-Funktor sind linksexakt.

**Beweis:**

Sei $A$ ein Ring, und seien $M, M', M'', N, N', N''$ $A$-Moduln.
Die Eigenschaft der Linksexaktheit werden im Folgenden gezeigt.

**i)** $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ ist exakt $\Rightarrow$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,N)} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,N)} \mathrm{Hom}_A(M', N)$$

ist exakt $\forall\, N$.

Angenommen, $\mathrm{Hom}_A(g, N)(j'') = j'' \circ g = 0$. Da $g$ surjektiv ist, gilt $j'' = 0$. Es folgt $\ker(\mathrm{Hom}_A(g, N)) = \{0\}$, daher ist $\mathrm{Hom}_A(g, N)$ injektiv.

$\mathrm{Hom}_A(f, N) \circ \mathrm{Hom}_A(g, N) = \mathrm{Hom}_A(f \circ g, N) = \mathrm{Hom}_A(0, N)$. Doch ist $\mathrm{Hom}_A(0, N) = 0$.

Also induziert $\mathrm{Hom}_A(g, N)$ einen Homomorphismus $\mathrm{Hom}_A(M'', N) \longrightarrow \ker \mathrm{Hom}_A(g, N)$. Ich zeige, daß dies ein Isomorphismus ist, indem ich das Inverse explizit konstruiere.
Sei nun $\mathrm{Hom}_A(f, N)(j) = j \circ f = 0$, also $j \in \mathrm{ker}\mathrm{Hom}_A(f, N)$. Wegen $\mathrm{ker} g = \mathrm{im} f$ verschwindet $j$ auf $\mathrm{ker} g$. Dann definiere $j'' : M'' \longrightarrow N$ durch $j''(g(x'')) = j(x)$. Da $j = 0$ auf $\mathrm{ker} g$ und $g$ surjektiv ist, ist j" wohldefiniert und ein $A$-Modulhomomorphismus. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(g, N)(j'') = j'' \circ g = j$, also $j \in \mathrm{im}\mathrm{Hom}_A(g, N)$. ∎

**ii)** $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ ist exakt $\Rightarrow$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(N,f)} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(N,g)} \mathrm{Hom}_A(M, N'')$$

ist exakt $\forall\, M$.

Der Beweis geht sehr analog. Angenommen also, $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ ist exakt. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(N, g) \circ \mathrm{Hom}_A(N, f) = \mathrm{Hom}_A(N, g \circ f) = \mathrm{Hom}_A(N, 0) = 0$, also $\mathrm{im}\,\mathrm{Hom}_A(N, g) \subseteq \ker \mathrm{Hom}_A(N, f)$. Aus $f$ injektiv folgt wieder $\mathrm{Hom}_A(N, f)$ injektiv. Ich zeige noch $\ker \mathrm{Hom}_A(N, f) \subseteq \mathrm{im}\,\mathrm{Hom}_A(N, g)$. Sei $j : M \longrightarrow N, j \in \ker \mathrm{Hom}_A(N, f)$, also $\mathrm{Hom}_A(N, f)(j) = 0$. Dann ist $\mathrm{im} j \subseteq \ker g = \mathrm{im} f$. Weil $f$ injektiv ist, ist $j \in \mathrm{im}\,\mathrm{Hom}_A(N, g)$. ∎

Bemerkung: in der Literatur sah ich *linksexakt* mittels $\Rightarrow$ charakterisiert, wie oben.
Es läßt sich natürlich auch die Rückrichtung $\Leftarrow$ beweisen. In ii) kann ich dazu, weil es für alle $M$ gilt, $M := A$ setzen, und erhalte wegen der Isomorphien $\mathrm{Hom}_A(A, N) \simeq N$ direkt die erste Sequenz. In i) analog, da setze ich $N := M''$ bzw. $N := M''/\mathrm{im} g, N := M/\mathrm{im} f$, und erhalte so die Rückrichtung.

/4P