Aufgabe 1

siehe handschriftliche Abgabe

Aufgabe 2

zu 1.) $\mathbf{Hom}(\mathbb{Z}/_\mathbf{n} \times \mathbb{Z}/_\mathbf{m}, \mathbb{Z}/_\mathbf{p})$ über dem Ring $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/_n \times \mathbb{Z}/_m$ wird erzeugt durch $\{(\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1})\}$. Jedes Element $(\overline{a},\overline{b}) \in \mathbb{Z}/_n \times \mathbb{Z}/_m$ hat die Darstellung $(\overline{a},\overline{b}) = a(\overline{1},\overline{0}) + b(\overline{0},\overline{1})$.

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_n \times \mathbb{Z}/_m, \mathbb{Z}/_p)$, $\overline{a} \in \mathbb{Z}/_n$, $\overline{b} \in \mathbb{Z}/_m$.

$$\begin{aligned} \varphi((\overline{a},\overline{b})) &= \varphi((\overline{a},\overline{0})) + \varphi((\overline{0},\overline{b})) \\ &= a\varphi((\overline{1},\overline{0})) + b\varphi((\overline{0},\overline{1})) \quad \text{(wegen } \mathbb{Z}\text{-Linearität von } \varphi) \end{aligned}$$

Der Homomorphismus φ ist bereits durch die Bilder der erzeugenden Elemente bestimmt. Daher ist

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_n \times \mathbb{Z}/_m, \mathbb{Z}/_p) \simeq \mathbb{Z}/_p \times \mathbb{Z}/_p.$$

Der zugehörige Isomorphismus

$$\psi : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_n \times \mathbb{Z}/_m, \mathbb{Z}/_p) \longrightarrow \mathbb{Z}/_p \times \mathbb{Z}/_p$$

ist bestimmt durch

$$\psi(\varphi) = (\overline{\varphi((\overline{1},\overline{0}))}, \overline{\varphi((\overline{0},\overline{1}))}).$$

Erzeugt wird $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_n \times \mathbb{Z}/_m, \mathbb{Z}/_p)$ durch $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ mit $\varphi_1((\overline{1},\overline{b})) = \overline{1}$ und $\varphi_2((\overline{a},\overline{1})) = \overline{1}$, also $\varphi_1((\overline{a},\overline{b})) = \overline{a}$ und $\varphi_2((\overline{a},\overline{b})) = \overline{b}$.

nicht immer $\in$ Hom(...)!

zu 2.) $\mathbf{Hom(k, k[X])}$ über dem Ring k

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(k, k[X])$, $\varphi(1) = \mathrm{p} \in k[X]$.
$\Rightarrow \mathrm{k} \in k : \varphi(\mathrm{k}) = \varphi(\mathrm{k} \cdot 1) = \mathrm{k} \cdot \varphi(1) = \mathrm{kp}$ wegen k-Linearität.
$\Rightarrow \varphi$ ist bereits eindeutig dadurch bestimmt, wie die $1 \in k$ abgebildet wird.
$\Rightarrow \mathrm{Hom}(k, k[X]) \simeq k[X]$:

$\psi : \mathrm{Hom}(k, k[X]) \to k[X]$, $\psi(\varphi) = \varphi(1)$ ist ein Gruppenisomorphismus:
$\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2) \Rightarrow \varphi_1(1) = \varphi_2(1) \Rightarrow \mathrm{k} \cdot \varphi_1(1) = \mathrm{k} \cdot \varphi_2(1)$
$\Rightarrow \varphi_1(\mathrm{k} \cdot 1) = \varphi_2(\mathrm{k} \cdot 1) \Rightarrow \varphi_1(\mathrm{k}) = \varphi_2(\mathrm{k})$ wegen k-Linearität, $\forall\, \mathrm{k} \in k, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(k, k[X]) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$
$\Rightarrow \psi$ ist injektiv. ($\psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi(1) = 0 \Rightarrow \forall \mathrm{k} \in k : \varphi(\mathrm{k}) = \mathrm{k}\varphi(1) = \mathrm{k}0 = 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$)
$\forall\, \mathrm{p} \in k[X]\ \exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}(k, k[X]) : \varphi(1) = \mathrm{p}, \varphi(\mathrm{k}) = \mathrm{kp}\ \forall\, \mathrm{k} \in k$
$\Rightarrow \psi$ ist surjektiv.
$\psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(1) = \varphi_1(1)\varphi_2(1)$ (φ_1, φ_2 sind Homomorphismen)
(Hom ist abelsche Gruppe, und damit isomorph zu $\mathbb{Z}$)
$\Rightarrow \psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \psi(\varphi_1) \circ \psi(\varphi_2)$ (additive Notation:$\psi(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi(\varphi_1) + \psi(\varphi_2)$)
$\Rightarrow \psi$ ist Gruppenhomomorphismus.

Eine Basis für $k[X]$ ist $\{1, X, X^2, X^3, \ldots\}$.

Ich wähle die Notation φ_p für $\varphi_p \in \mathrm{Hom}(k, k[X])$ mit $\varphi_p(\mathrm{k}) = \mathrm{kp}$ und $\mathrm{k} \in k, \mathrm{p} \in k[X]$.

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad , n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow \varphi_p = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_{X^i}$$

Eine Basis für $\mathrm{Hom}(k, k[X])$ über dem Ring k ist also $\{\varphi_1, \varphi_X, \varphi_{X^2}, \varphi_{X^3}, \ldots\}$.

zu 2.) Hom(k,k[X]) über dem Ring k[X]

$\mathrm{Hom}(k, k[X]) = \{0\}$: es gibt keinen nichttrivialen Modulhomomorphismus zwischen k und $k[X]$ über dem Ring $k[X]$.

Betrachte k als $k[X]$-Modul: $\exists\, p_1, p_2 \in k[X] : p_1 \cdot 1 = p_2 \cdot 1$ (k als echtes $k[X]$-Untermodul von $k[X]$) mit $p_1 \neq p_2$

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(k, k[X])$ ein nichttrivialer Homomorphismus, also $\varphi \neq 0$. Dann ist aufgrund der $k[X]$-Linearität $\varphi(1) \neq 0$.

$\Rightarrow \varphi(p_1 \cdot 1) = \varphi(p_2 \cdot 1) \Rightarrow p_1\varphi(1) = p_2\varphi(1)$ wegen $k[X]$-Linearität
$\Rightarrow p_1 = p_2$ Widerspruch.

zu 3.) Hom(k[X],k) über dem Ring k

Seien $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(k[X], k)$, $\varphi_i(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = a_i \in k$, also $\varphi_i(X^i) = 1$. Diese φ_i bilden ein Erzeugendensystem für $\mathrm{Hom}(k[X], k)$, denn sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(k[X], k)$ mit $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \mathrm{k} \in k$,

$$\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi(X^i)$$

wegen k-Linearität, φ ist bereits dadurch bestimmt, wie es die Bilder der $k[X]$-Basis $\{1, X, X^2, X^3, \ldots\}$ abbildet. Daher ist jeder

$\phi \in \{f : k^{\mathbb{N}} \to k\} \simeq k[[X]]$

Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(k[X], k)$ eine endliche Linearkombination der unabhängigen φ_i, welche also eine Basis für $\mathrm{Hom}(k[X], k)$ bilden.

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(k[X], k) \simeq k[X]$. $k[[X]]$

zu 3.) Hom(k[X],k) über dem Ring k[X]

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(k[X], k), \varphi(1) = \mathrm{k}$, $\mathrm{k} \in k, 1 \in k[X]$.
$\Rightarrow \forall\, \mathrm{p} \in k[X] : \varphi(\mathrm{p}) = \mathrm{p}\varphi(1) = \mathrm{pk}$ wegen $k[X]$-Linearität
$\Rightarrow \varphi$ ist eindeutig durch $\varphi(1)$ bestimmt

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(k[X], k) \simeq k$.

Der zugehörige Isomorphismus ist $\varphi \longrightarrow \varphi(1)$:

$\psi : \mathrm{Hom}(k[X], k) \to k\ ,\ \psi(\varphi) = \varphi(1)$ ist ein Gruppenisomorphismus:
$\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2) \Rightarrow \varphi_1(1) = \varphi_2(1) \Rightarrow \mathrm{p} \cdot \varphi_1(1) = \mathrm{p} \cdot \varphi_2(1)$
$\Rightarrow \varphi_1(\mathrm{p} \cdot 1) = \varphi_2(\mathrm{p} \cdot 1) \Rightarrow \varphi_1(\mathrm{p}) = \varphi_2(\mathrm{p})$ wegen $k[x]$-Linearität, $\forall\, \mathrm{p} \in k[X], \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(k[X], k) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$
$\Rightarrow \psi$ ist injektiv. $(\psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi(1) = 0 \Rightarrow \forall\, \mathrm{p} \in k[X] : \varphi(\mathrm{p}) = \mathrm{p}\varphi(1) = \mathrm{p}0 = 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0)$
$\forall\, \mathrm{k} \in k\ \exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}(k[X], k) : \varphi(1) = \mathrm{k}, \varphi(\mathrm{p}) = \mathrm{pk}\ \forall\, \mathrm{p} \in k[X]$
$\Rightarrow \psi$ ist surjektiv.
$\psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(1) = \varphi_1(1)\varphi_2(1)$ $(\varphi_1,\ \varphi_2$ sind Homomorphismen$)$ (Hom ist abelsche Gruppe, und damit isomorph zu $\mathbb{Z}$)
$\Rightarrow \psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \psi(\varphi_1) \circ \psi(\varphi_2)$ (additive Notation:$\psi(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi(\varphi_1) + \psi(\varphi_2)$)
$\Rightarrow \psi$ ist Gruppenhomomorphismus.

Besitzt k eine Basis $\{b_i\}$, so ist die Basis $\{\varphi_i\}$ von $\mathrm{Hom}(k[X], k)$ bestimmt durch $\varphi_i(1) = b_i$.

/3P

Aufgabe 3

zu 1.)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

(1) ist eine kurze exakte Sequenz, daher muss f_2 surjektiv sein, mit $\ker f_2 \simeq \mathbb{Z}$, und f_1 injektiv, mit $\operatorname{coker} f_1 \simeq \mathbb{Z}$, wegen $\operatorname{im} f_1 = \ker f_2$.

Betrachte zunächst die Projektionen $f_{2_1}((a,b)) = a$ und $f_{2_2}((a,b)) = b$. Sie sind surjektiv, und wegen $\ker f_{2_1} = \{(0,b) |\, b \in \mathbb{Z}\}$ bzw. $\ker f_{2_2}=\{(a,0) |\, a \in \mathbb{Z}\}$ machen die Homomorphismen $f_{1_1}(a) = (0,a)$ bzw. $f_{1_1}(a) = (a,0)$, f_{1_1},f_{1_2} : $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ die Sequenz (1) exakt. f_{1_1} und f_{1_2} sind injektiv.

Betrachte nun f_2 ohne die Projektionen. Aus den Eigenschaften der $\mathbb{Z}$-Linearität folgt für $0, a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&f_2((0,0)) = 0 \cdot f_2((0,0)) = 0,\\
&f_2((a,0)) = af_2((1,0)),\\
&f_2((0,b)) = bf_2((0,1)),
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_2((a,b)) = af_2((1,0)) + bf_2((0,1)). \tag{2}$$

f_2 ist somit bereits vollständig bestimmt durch die Festlegung der Bilder von $(1,0)$ und $(0,1)$. Damit f_2 surjektiv ist, muß der größte gemeinsame Teiler von $f_2((1,0))$ und $f_2((0,1))$ gleich 1 sein: $\operatorname{ggt}(f_2((1,0)), f_2((0,1))) = 1$. Dann ist auch jedes $x \in \mathbb{Z}$ darstellbar als Linearkombination von $f_2((1,0))$ und $f_2((0,1))$, tritt also als ein Bild $f_2((a,b))$ auf.

Betrachte den kanonischen Fall $f_2((1,0)) = 1$ und $f_2((0,1)) = 1$:
$f_2(a,b) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$
$\Rightarrow \ker f_2 = \{(a,-a) |\, a \in \mathbb{Z}\}$
$\Rightarrow \operatorname{im} f_1 = \{(a,-a) |\, a \in \mathbb{Z}\}$, f_1 injektiv,

$$\Rightarrow f_1(a) = (a,-a) \vee f_1(a) = (-a,a). \tag{3}$$

Der allgemeine Fall für $(f_2((1,0)), f_2((0,1))) = (x,y)$, $\operatorname{ggT}(x,y) = 1$ ergibt sich durch Umrechnen/Betrachten des Kerns $ax + by = 0$ analog.

Linke äußere Abbildung: $0 \longrightarrow 0 \in \mathbb{Z}$, rechte äußere Abbildung: $\mathbb{Z} \ni a \longrightarrow 0$.

zu 2.)

$$0 \longrightarrow k[X] \xrightarrow{f_1} k[X] \xrightarrow{f_2} k \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Da (4) eine kurze exakte Sequenz ist, muß f_2 surjektiv sein und $\ker f_2 \simeq k[X]$, f_1 injektiv, $\operatorname{coker} f_1 = k$.
Sei für $p \in k[X]$:

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad , n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{5}$$

Für einen Homomorphismus $f_2 : k[X] \longrightarrow k$ gilt wegen $k[X]$-Linearität

$$f_2(p) = p f_2(1).$$

Das weitere hängt von der Wahl der $k[X]$-Modulstruktur ab. Ich wähle die kanonische $k[X]$-Modulstruktur, mit der Multiplikation $p \cdot \mathrm{k} := p(0)\mathrm{k}$. k läßt sich als Untermodul von $k[X]$ betrachten, indem die Elemente von k mit den konstanten Polynomen identifiziert werden. Der zugehörige Homomorphismus f_2 bildet also die Elemente aus $k[X]$ auf ihren konstanten Anteil ab: $f_2(p) = a_0 = p(0)$.
f_2 ist der Einsetzungshomomorphismus an der Stelle 0, damit es surjektiv wird.

$$\Rightarrow \ker f_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \;\mid\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\Rightarrow \;\; \operatorname{im} f_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \;\mid\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

f_1 bildet ab auf Polynome mit konstantem Anteil $a_0 = 0$. Auch für den Homomorphismus $f_1 : k[X] \longrightarrow k[X]$ gilt wegen $k[X]$-Linearität

$$f_1(p) = p f_1(1).$$

$$\Rightarrow f_1 : k[X] \longrightarrow k[X], \;\; f_1(p) = pX = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+1}$$

für p wie in (5) definiert.

Linke äußere Abbildung: $0 \longrightarrow 0 \in k[X]$, rechte äußere Abbildung:
$k \ni \mathrm{k} \longrightarrow 0$.

zu 3.)

$$0 \longrightarrow k[X] \xrightarrow{f_1} k[X] \xrightarrow{f_2} k[X]/(X^2) \longrightarrow 0. \tag{6}$$

Da (6) eine kurze exakte Sequenz ist, muß f_2 surjektiv sein und $\ker f_2 \simeq k[X]$, f_1 injektiv, $\operatorname{coker} f_1 = k[X]/(X^2)$.

Sei für $p \in k[X]$:

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad , n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{7}$$

Für einen Homomorphismus $f_2 : k[X] \longrightarrow k[X]/(X^2)$ gilt

$$f_2(p) = p f_2(1).$$

Ich wähle die $k[X]$-Modulstruktur wie in 2). Für $k[X]/(X^2)$ als Untermodul von $k[X]$ ist der zugehörige Homomorphismus f_2 die Abbildung auf den Anteil ersten Grades: $f_2(p) = a_0 + a_1 X$.

$$\Rightarrow \ker f_2 = \left\{ \sum_{i=2}^{n} a_i X^i \;\mid\; n \in \mathbb{N} \backslash \{1\} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{im} f_1 = \left\{ \sum_{i=2}^{n} a_i X^i \;\mid\; n \in \mathbb{N} \backslash \{1\} \right\}$$

f_1 bildet ab auf Polynome mit den Koeffizienten $a_0 = a_1 = 0$. Auch für den Homomorphismus $f_1 : k[X] \longrightarrow k[X]$ gilt wegen $k[X]$-Linearität

$$f_1(p) = p f_1(1).$$

$$\Rightarrow f_1 : k[X] \longrightarrow k[X] \;, f_1(p) = pX^2 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+2}$$

für p wie in (7) definiert.

Linke äußere Abbildung: $0 \longrightarrow 0 \in k[X]$, rechte äußere Abbildung: $k[X]/(X^2) \ni$ k$\longrightarrow 0$.

/3P