Aufgabe 1

Gegeben: A sei ein Ring, $X = \text{Spec}(A)$ sein Primspektrum
(bzw. Maximalspektrum).

Bezeichnung:

$$D_f := X \backslash V(f) \quad \text{für } f \in A$$

D_f sind offen in X.

a) zu zeigen: $D_f \cap D_g = D_{fg}$

$V(f) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ Primideal mit } \mathfrak{p} \ni f\}$

$\mathfrak{p}$ sei ein beliebiges Primideal von A.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in D_f \cap D_g &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in D_f \ \wedge \ \mathfrak{p} \in D_g \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in X\backslash V(f) \ \wedge \ \mathfrak{p} \in X\backslash V(g) \\
&\Leftrightarrow f \notin \mathfrak{p} \ \wedge \ g \notin \mathfrak{p} \\
&\Leftrightarrow fg \notin \mathfrak{p} \quad (\text{denn } \mathfrak{p} \text{ ist Primideal, und } fg \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \mathfrak{p} \vee g \in \mathfrak{p}) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in X\backslash V(fg) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in D_{fg}
\end{aligned}$$

Also: $D_f \cap D_g = D_{fg}$.

b) zu zeigen: $D_f = 0 \Leftrightarrow f$ nilpotent

$$\begin{aligned}
D_f = 0 &\Leftrightarrow X\backslash V(f) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow V(f) = X \\
&\Leftrightarrow f \in \mathfrak{p} \ \ \forall \mathfrak{p} \in X \\
&\Leftrightarrow f \in \mathfrak{n} \quad (\mathfrak{n} \text{ Nilradikal, } \mathfrak{n} \text{ ist Durchschnitt aller Primideale in } A) \\
&\Leftrightarrow f \text{ ist nilpotent, nach Definition des Nilradikals.}
\end{aligned}$$

c) zu zeigen: $D_f = X \Leftrightarrow f$ ist Einheit

$$\begin{aligned} D_f = X &\Leftrightarrow X \backslash V(f) = X \\ &\Leftrightarrow V(f) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow f \notin \mathfrak{p} \quad \forall \mathfrak{p} \in X \\ &\Leftrightarrow f \in \mathfrak{a} \quad \forall \mathfrak{a} \neq A, \mathfrak{a} \text{ Ideal in } A, \end{aligned}$$

denn zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \in A$ gibt es ein Primideal, welches $\mathfrak{a}$ enthält (in kommutativen Ringen mit $1 \neq 0$), weil es ein maximales Ideal gibt, was $\mathfrak{a}$ enthält, und hier maximale Ideale auch Primideale sind,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad f \in \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} = A \\ &\Leftrightarrow \quad (f) = A \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ ist Einheit.} \end{aligned}$$

vspace1cm **d) zu zeigen:** $D_f = D_g \Leftrightarrow r\big((f)\big) = r\big((g)\big)$

$$\begin{aligned} D_f = D_g &\Leftrightarrow X \backslash V(f) = X \backslash V(g) \\ &\Leftrightarrow V(f) = V(g) \\ &\Leftrightarrow \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ Primideal mit } f \in \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{q} : \mathfrak{q} \text{ Primideal mit } g \in \mathfrak{q}\} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{p} \in V(f) : g \in \mathfrak{p} \quad \wedge \quad \forall \mathfrak{q} \in V(g) : f \in \mathfrak{q} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{a} \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(f)} \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \in \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(g)} \mathfrak{q} \quad \wedge \quad \forall \mathfrak{a} \in \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(g)} \mathfrak{q} \Rightarrow \mathfrak{a} \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(f)} \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \quad \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(f)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(g)} \mathfrak{q} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ f \in \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) \\ g \in \mathfrak{q}}} \mathfrak{q} \\ &\Leftrightarrow r\big((f)\big) = r\big((g)\big) \end{aligned}$$

nach der Charakterisierung des Radikals als Durchschnitt von Primidealen.

e) zu zeigen: X ist quasikompakt

X heißt quasikompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Es genügt, die Quasikompaktheit für Basiselemente der Topologie auf X nachzuweisen, dann ist die Gültigkeit für ganz X gezeigt. $(D_f)_{f \in A}$ ist Basis. Sei also $X = \bigcup_{f \in I} D_f$ eine offene Überdeckung von X, D_f sind offen als Basiselemente der (offenen) Topologie auf X, I sei Indexmenge. Betrachte das Ideal $\mathfrak{a} := \{f \in A : f \in I\}$.
Wenn $\mathfrak{a} \neq A$, dann ist $\mathfrak{a}$ in einem maximalen Ideal enthalten, also in einem Primideal.
Also ist $\mathfrak{a} = A = (1) \Rightarrow \exists\, f_1, \ldots, f_n \in I$ mit $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 1, a_1, \ldots\, a_n \in A \Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^n D_{f_i}$ ist offene Teilüberdeckung.

g) zu zeigen: Eine offene Teilmenge U in X ist quasikompakt (mit der induzierten Topologie) $\Leftrightarrow U$ ist endliche Vereinigung offener Mengen D_f

„$\Leftarrow$“ : Ist U endliche Vereinigung offener Mengen D_f, dann ist U selbst quasikompakt, weil jedes D_f nach f) quasikompakt ist, und für jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Die endliche Vereinigung endlicher Teilüberdeckungen ergibt natürlich auch wieder eine endliche Teilüberdeckung, also ist U quasikompakt. (Für eine offene Überdeckung von U betrachte man die offenen Überdeckungen der D_f, welche endlich vereinigt U ergeben, und vereinige die endlichen Teilüberdeckungen der D_f zu einer endlichen Teilüberdeckung von U).

„$\Rightarrow$“ : Sei $U \subset X$ offen und quasikompakt. Weil die $(D_f)_{f \in A}$ eine Basis offener Mengen bilden, gibt es eine Teilmenge $I \subseteq A$ mit $U = \bigcup_{f \in I} D_f$. Dies ist eine offene Überdeckung von U, und U ist quasikompakt, also existiert eine endliche Teilüberdeckung $U = \bigcup_{i=1}^n D_{f_i}, f_i \in I$.
Also ist U eine endliche Vereinigung offener Mengen D_f.

h) zu zeigen: A noetherscher Ring $\Rightarrow$ jede offene Teilmenge U ist quasikompakt

Ist A ein noetherscher Ring, dann sind alle Ideale endlich erzeugt, jede offene Teilmenge in $\mathrm{Spec}(A)$ ist endliche Vereinigung offener Mengen D_f, und mit g) folgt, daß jede offene Teilmenge quasikompakt ist.

muß genauer begründet werden! *$/4{,}5$ P*

Aufgabe 2

Sei X ein topologischer Raum.

$$
\begin{aligned}
Y \subseteq X & \text{ ist irreduzibel in } X \\
&\Leftrightarrow \quad Y = Y_1 \cup Y_2 \Rightarrow Y = Y_1 \ \vee \ Y = Y_2 \quad \text{für } Y_1, Y_2 \text{ abgeschlossen} \\
&\Leftrightarrow \quad Y = (Y_1^c \cap Y_2^c)^c \Rightarrow Y = Y_1 \ \vee \ Y = Y_2 \quad (\text{Komplement zu } Y) \\
&\Leftrightarrow \quad Y_1^c \cap Y_2^c = \emptyset \Rightarrow Y = Y_1 \ \vee \ Y = Y_2 \\
&\Leftrightarrow \quad Y_1^c \cap Y_2^c = \emptyset \Rightarrow Y_1^c = \emptyset \ \vee \ Y_2^c = \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad Z_1 \cap Z_2 = \emptyset \Rightarrow Z_1 = \emptyset \ \vee \ Z_2 = \emptyset
\end{aligned}
$$

für Z_1, Z_2 offen, $Z_1, Z_2 \in Y$,

$\Leftrightarrow$ je zwei nichtleere offene Teilmengen von Y haben Durchschnitt $\neq \emptyset$ (1)

a) zu zeigen: Ist Y in X irreduzibel, dann auch der Abschluß $\overline{Y}$ in X.

Seien $Y_1, Y_2 \subseteq \overline{Y}$, beide offen und nichtleer, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Nach (1) ist $Y_1 \cap Y = \emptyset$ oder $Y_2 \cap Y = \emptyset$, weil $Y_1 \cap Y$ und $Y_2 \cap Y$ offen in Y sind, nach Definition der induzierten Topologie.
Angenommen, $Y_1 \cap Y = \emptyset \Rightarrow Y_1 \subseteq \overline{Y} \backslash Y$ (für $Y_2 \cap Y = \emptyset$ analog) Y_1 ist offen und nichtleer und liegt im Abschluß von Y, muß also einen nichtleeren Durchschnitt mit Y haben - Widerspruch.
$\Rightarrow Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$
$\Rightarrow \overline{Y}$ ist irreduzibel (nach (1)).

b) zu zeigen: Jeder irreduzible Teilraum von X ist enthalten in einem maximalen irreduziblen Teilraum.

Sei K eine aufsteigende Kette irreduzibler Teilräume von X, enthaltend einen irreduziblen Teilraum von X, der mit Y bezeichnet sei. K ist geordnet durch Inklusion. $K \neq \emptyset$, da $Y \in K$. Die Vereinigung dieser aufsteigenden Kette enthält Y: $Y \subseteq \bigcup K =: \widetilde{K}$.
Zwei beliebige nichtleere in $\widetilde{K}$ offene Mengen $Y_1, Y_2 \subseteq \widetilde{K}$ haben einen nichtleeren Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, da jede Teilmenge einen nichtleeren Durchschnitt mit mindestens einem Element der Kette K haben muß, und da K eine Kette ist, schneiden beide Y_1, Y_2 das größere der beiden Elemente, und dieses Element ist irreduzibel, Y_1, Y_2 schneiden sich also in diesem Element.
Nach (1) ist $\widetilde{K}$ irreduzibel.

Nach Zorns Lemma hat die Menge M aller irreduziblen Unterräume von X, die Y enthalten, maximale Elemente. ($M \neq \emptyset$, da $x \in M\ \forall x \in X$, jede Kette K wird durch $\bigcup K$ begrenzt, $\bigcup K$ irreduzibel, $\bigcup K \in M$)

c) zu zeigen: Die maximalen irreduziblen Teilräume von X sind abgeschlossen und überdecken X.

Sei Y ein maximaler irreduzibler Teilraum von X, dann ist nach a) auch $\overline{Y}$ irreduzibel. Es gilt $Y \subseteq \overline{Y}$. Da Y ein maximaler irreduzibler Teilraum ist, muß $Y \supseteq \overline{Y}$ gelten, also ist $Y = \overline{Y}$.
$\forall\, x \in X : \{x\}$ ist irreduzibel, $\{x\}$ ist nach b) in einem maximalen irreduziblen Teilraum von X enthalten
$\Rightarrow$ die maximalen Teilräume überdecken X.

Im weiteren sei A ein Ring.

d) zu zeigen: Die Menge der Primideale in A besitzt minimale Elemente.
K sei eine absteigende Kette von Primidealen in A, K ist geordnet durch Inklusion. K hat eine untere Schranke $\mathfrak{a} = \bigcap K$, der Durchschnitt aller Elemente der Kette K.
Als Durchschnitt von Primidealen ist $\mathfrak{a}$ selbst ein Primideal, also $\mathfrak{a} \in M$. Nachweis: seien $x, y \in A$ beliebig. Sei weiter $xy \in \mathfrak{a}$, zu zeigen ist, daß dann $x \in \mathfrak{a}$ oder $y \in \mathfrak{a}$. Ist $x \in \mathfrak{a}$, sind wir fertig, und $\mathfrak{a}$ ist Primideal, ist aber $x \notin \mathfrak{a} : \exists$ Primideal $\mathfrak{p} \in K$ mit $x \notin \mathfrak{p}$, und da $\mathfrak{p}$ Primideal ist, gilt $y \in \mathfrak{p}$.
Sei $\mathfrak{q} \in K, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow x \notin \mathfrak{q}$, und weil $xy \in \mathfrak{a} \Rightarrow y \in \mathfrak{q} \Rightarrow y \in \mathfrak{a}$.
Also: $M \neq \emptyset$, M ist mittels Inklusion induktiv geordnet, jede Kette hat ja eine obere Schranke, man kann Zorns Lemma anwenden, daher enthält M minimale Elemente.

e) zu zeigen: Die Mengen $V(\mathfrak{p})$ bilden die irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Spec}(A)$ für $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal.

Sei $U \subseteq X$, dann ist $U = \bigcup_{f \in I} V(f)$, $I \subseteq A$ Indexmenge

$$\Rightarrow U = \bigcup_{\mathfrak{p} \subseteq U, \mathfrak{p} \text{ min. PI}} V(\mathfrak{p})$$

(abgeschlossene Vereinigung)
Da U irreduzibel ist, muß schon $U = V(\mathfrak{p})$ sein für $\mathfrak{p}$ minimales Primideal.

e) begründen! *$/5$ P*